Mathématiques 2 – TD 2108
Interrogation 2

1. Question de cours : donner la définition du rang pour une matrice M de taille $m \times n$. (0,5 point)

Définition (Rang)**.** Le rang d'une matrice est lenombre minimum de colonnes ou de lignes linéairement indépendantes.

2. Question de cours : quelle propriété lie le rang d'une matrice et le rang d'une de ses sous-matrices? (0,5 point)

3. Exercice. Soit M_1 et M_2 deux matrices telles que:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Déterminer le rang de M_1. (1,5 point)

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(M_1) &= \mathrm{rg} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \, (\text{pivot}) \\ L_2' \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3' \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\ &= \mathrm{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  La sous-matrice obtenue en supprimant la troisième colonne est une matrice triangulaire d'ordre 3 sans zéro sur la diagonale. Donc le rang de M_1 est supérieur ou égal à 3. Or, M_1 ne contient que trois lignes, son rang est infériur à 3. Donc, on obtient $\mathrm{rg}(M_1) = 3$

- Sachant que le rang de M_2 est $rg(M_2) = 2$, en déduire, sans calcul, si le système S_1 admet une unique solution, une infinité de solutions ou aucune solution :

$$S_1 : M_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .(1,5 \text{ point})$$

On sait que le rang de M_2 est égal à 2. Et le système S_1 est représenté par la matrice M_1. Soit $u = (-1, 2, 1)$, on a $\mathrm{rg}(M_1) = \mathrm{rg}(M_2|u) = \mathrm{rg}(M_2) + 1$. Le système S_1 n'admet donc aucune solution.

4. Définir et donner une exemple de trois colonnes linéairement indépendantes. (1 point)

Aussi possible de donner cette définition en toutes lettres (cf. cours).

Définition (Colonnes libres)**.** On dit que trois colonnes C_1, C_2 et C_3 d'une matrice sont linéairement indépendantes ou libres si pour x_1, x_2 et x_3 trois réels, on a:

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 = 0 \implies x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Un exemple de trois colonnes linéairement indépendantes est la matrice identité de taille 3×3 (qui représente la base canonique de $\mathbb{R}^3$).