Dossier 3 : Accumulation du capital et croissance

Exercice 1 : le modèle de Solow avec progrès technique

On a les connaissances suivantes :

- $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$ est la fonction de production avec $\alpha \in]0\,,1[$
- l'investissement égalisé l'épargne au taux s tel que : $I = sY$ avec $s \in]0\,,1[$
- les taux de croissance des variables sont : $\frac{\dot{L}}{L} = n \geq 0$, $\frac{\dot{A}}{A} = \gamma \geq 0$
- le taux de dépréciation du capital est δ
- dans ce modèle $k = K/AL$ est le stock de capital en unités de travail efficace

Question 1 : déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de k.

Rappels. La fonction de production de l'exercice est une fonction homogène de degré 1 ou, dit autrement, a des rendements d'échelle constants. Autrement dit, on peut écrire $f(tAL\,,tK) = tf(AL\,,K)$. Une conséquence de cette propriété est que : $F(AL\,,K) = ALF(1\,,K/AL)$. En notant $f(k) = F(1\,,K/AL)$, il vient directement : $F(K\,,AL)/K = f(k)/k$. Par ailleurs, on notera que $f(k) = k^{\alpha}$.

Le principe est simple. On doit écrire $\frac{\dot{k}}{k}$ en fonction de variables exogènes. Pour se faire on part du fait que le taux de croissance d'un produit est la somme des taux de croissance, autrement dit on part de :

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L}$$

On connait $\frac{\dot{A}}{A} = \gamma$ et $\frac{\dot{L}}{L} = n$ donnés dans l'énoncé. Pour experimer $\frac{\dot{K}}{K}$, on part de l'équation d'évolution du capital à chaque période et on cherche à l'exprimer en fonction soit de k soit de variables exogènes :

$$\begin{aligned} \dot{K} = I - \delta K &\iff \dot{K} = sY - \delta K \\ &\iff \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{f(k)}{k} - \delta \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k)}{k} - (\delta + \gamma + n)$$

On en déduit l'équation différentielle régissant l'évolution de k à savoir :

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (\gamma + n + \delta)$$

Question 2 : en déduire que le modèle suit un sentier de croissance à taux constant que l'on caractérisera (on notera k^* le stock de capital en unités de travail efficace stationnaire). Indiquer en particulier comment évoluent sur ce sentier les productivités moyennes du capital et du travail ainsi que le salaire réel ω et le taux d'intérêt réel r.

A l'équilibre, on suppose $\frac{\dot{k}}{k} = 0$. On cherche k^* le stock de capital en unités de travail efficace stationnaire :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{k}}{k} = 0 &\iff s\frac{f(k)}{k} = \gamma + n + \delta \\ &\iff k^{\alpha - 1} = \frac{\gamma + n + \delta}{s} \end{aligned}$$

On ré-arrange et on obtient :

$$k^* = \left(\frac{s}{\gamma + n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

La question est ensuite de calculer les taux de croissance $\frac{\dot{Y}}{Y}$, $\frac{\dot{K}}{K}$ et $\frac{\dot{C}}{C}$. Pour K, on a :

$$\frac{\dot{K}}{K} = \gamma + n + \frac{\dot{k}}{k} = \gamma + n$$

Pour Y, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L}\right) &\iff \frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\,(\gamma + n) \\ &\iff \frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\,(\gamma + n) + (1-\alpha)(\gamma + n) \\ &\iff \frac{\dot{Y}}{Y} = \gamma + n \end{aligned}$$

Enfin, la consommation C est telle que $C = (1-s)Y$ et il vient directement : $\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \gamma + n$.

On doit ensuite donner les productivités moyennes du travail et du capital :

- $\frac{\dot{Y/L}}{Y/L} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = \gamma + n - n = \gamma$;
- $\frac{\dot{Y/K}}{Y/K} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{K}}{K} = \gamma + n - \gamma - n = 0$.

Le salaire réel et le taux d'intérêt réel sont respectivement les productivités marginales du travail et du capital ; autrement dit, comme on l'a vu au DOssier 2 on obtient : $\omega = PmL = (1-\alpha)K^\alpha A^{1-\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{Y}{L}$ et $r = PmK = \alpha K^{\alpha-1}A^{1-\alpha}L^{1-\alpha} = \alpha\frac{Y}{K}$. Il suffit maintenant de prendre les taux de croissance de ces deux variables :

- $\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\dot{Y/L}}{Y/L} = \gamma$;
- $\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{Y/K}}{Y/K} = 0$.

Question 3 : soit $v_t = K_t/Y_t$ le coefficient de capîtal. Exprimer v_t en fonction de k_t puis montrer que v vérifie une équation différentielle linéaire que l'on résoudra. Commenter la dynamique transitoire de l'économie.

$$v = \frac{K}{Y} = \frac{k}{f(k)} = k^{1-\alpha} \implies \frac{\dot{v}}{v} = (1-\alpha)\frac{\dot{k}}{k}$$
$$\iff \frac{\dot{v}}{v} = (1-\alpha)\left[sk^{\alpha-1} - (\gamma+n+\delta)\right]$$

On obtient finalement l'équation différentielle linéaire pour v telle que :

$$\dot{v} = (1-\alpha)\left[sk^{\alpha-1} - (\gamma+n+\delta)\right] v$$

Or, il nous reste k et on souhaite n'avoir que la fonction v dans l'équation et des paramètres exogènes. On utilise le fait que $v = k^{1-\alpha}$ et on ré-arrange pour pouvoir ré-écrire une équation différentielle en v.

$$\dot{v} = (1-\alpha)\left[sk^{\alpha-1} - (\gamma+n+\delta)\right] k^{1-\alpha} \iff \dot{v} = (1-\alpha)\left[s - k^{1-\alpha}(\gamma+n+\delta)\right]$$
$$\iff \dot{v} = (1-\alpha)s - (1-\alpha)(\gamma+n+\delta)v$$

A l'état stationnaire, $\dot{v} = 0$, ce qui nous donne directement v^* tel que :

$$v^* = \frac{s}{\gamma+n+\delta}$$

Proposition. Soit une équation différentielle ED telle que $(ED) f'(x) = af(x) + b$. Une solution de cette équation différentielle est $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $C = y_0 + \frac{b}{a}$

Une solution à l'équation différentielle est donc :

$$v_t = \left[v_0 + \frac{(1-\alpha)s}{-(1-\alpha)(\gamma+n+\delta)}\right] \mathrm{e}^{-(1-\alpha)(\gamma+n+\delta)t} + \frac{(1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\gamma+n+\delta)}$$
$$\iff v_t = v^* + (v_0 - v^*)\,\mathrm{e}^{-\beta t}$$

Question 4 : exprimer le niveau de production par tête $y_t = Y_t/L_t$ en fonction de k_t. Décrire qualitativement l'évolution de y_t lorsqu'on part d'un bas niveau de capital par tête. Représenter géométriquement l'allure de l'évolution de $\ln y_t$ en fonction du temps.

On sait que $y = Y/L = ALf(k)/L = Af(k) = Ak^\alpha$. Le logarithme népérien de y est : $\ln y = lnA + \alpha \ln k$. On obtient donc en $t = 0$ et avec $A = A_0\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ l'expression suivante :

$$\ln y_0 = \ln A_0 + \alpha \ln k_0$$

Graphe : supposer d'abord que $k_0 = k^*$. Tracer la droite dans le plan $(0\,, t\,, \ln y_t)$. Décrire ensuite une trajectoire en partant d'un plus bas niveau de capital par tête $k_0^1 < k^*$. Le faire de nouveau pour $k_0^2 < k_0^1 < k^*$.

Deux choses sont observables et à noter :

- les deux trajectoires convergent vers la première trajectoire où le capital par tête est déjà à sa valeur de long terme ;
- l'écart entre les deux dernières trajectoires tend vers zéro, i.e. une économie ayant initialement moins de capital “rattrape” l'autre : on parle de convergence absolue.

Question 5 : comment se déplace la trajectoire si le taux d'épargne augmente ? Commenter.

Graphe : faire le même type de graphe que ci-dessus.

Une hausse du taux d'épargne augmente intialement le taux de croissance de l'économie. A long terme, le taux de croissance est le même. Cependant, le niveau de capital par tête de long terme a lui augmenté.

Question 6 : soit c^* la valeur stationnaire de la consommation en unités de travail efficace. Montrer que : $c^* = k^{*\alpha} - (\gamma+n+\delta)k^*$. Monter qu'il existe une valeur du stock de capital en unités de travail efficace k_g^* qui maximise la consommation en unités de travail efficace. Que vaut la productivité marginale du capital stationnaire pour cette valeur k_g^* ? Interpréter cette règle d'accumulation appelée règle d'or.

Dans un premier temps, on cherche à exprimer c^* en fonction de k^* en essayant de trouver une forme assez simple (pour pouvoir la dériver rapidement).

$$\begin{aligned}
C^* = (1-s)Y &\iff c^* = (1-s)\frac{Y}{AL} \\
&\iff c^* = (1-s)f(k^*) \\
&\iff c^* = (1-s)k^{*\alpha} \\
&\iff c^* = k^{*\alpha} - sk^{*\alpha} \\
&\iff c^* = k^{*\alpha} - (\gamma+n+\delta)k^*
\end{aligned}$$

On calcule maintenant la dérivée de c^* par rapport à k^* :

$$\frac{\mathrm{d}\, c^*}{\mathrm{d}\, k^*} = \alpha k^{\alpha-1} - (\gamma+n+\delta)$$

On cherche maintenant un point critique. On égalise la dérivée à 0 :

$$\alpha k^{\alpha-1} = \gamma+n+\delta \iff k_g = \left(\frac{\alpha}{\gamma+n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Afin de déterminer si ce point critique est un maximum (global), il faut vérifier que la fonction est concave partout, autrement dit il faut vérifier que la dérivée seconde est négative :

$$\frac{\mathrm{d}^2\, c^*}{\mathrm{d}\, k^2} = \alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2} < 0$$

C'est un produit de termes positifs à l'exception de $\alpha - 1$ qui est négatif, donc la dérivée seconde est négative, d'où k_g est bien un maximum.

La productivité marginale du capital stationnaire pour cette valeur est :

$$\frac{\mathrm{d}\, f(k_g)}{\mathrm{d}\, k_g} = \frac{\mathrm{d}\, k_g^\alpha}{\mathrm{d}\, k_g} = \alpha k_g^{\alpha-1} = \alpha\left(\frac{\gamma+n+\delta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-1}} = \gamma+n+\delta$$

On remarque alors que le rendement marginal net de la dépréciation est égal au taux de croissance de l'économie :

$$\frac{\mathrm{d}\, f(k_g)}{\mathrm{d}\, k_g} - \delta = \gamma+n$$

Ceci est la règle d'or (de l'accumulation) qui consiste à dire : la consommation par tête est maximale lorsque le capital par tête vérifie l'égalité entre sa productivité marginale du et le taux de croissance de l'économie.

Question 7 : en déduire qu'il existe un taux d'épargne s_g^* maximisant la consommation en unités de travail efficace de long terme. Commenter sur cette base les effets sur l'ensemble des variables d'un accroissement de l'effort d'épargne.

On cherche s_g tel que $k_g = k^*$, autrement dit on cherche un unique taux d'épargne assurant que le stock de capital en unités de travail maximisant la consommation efficace soit optimal. Il suffit ici d'avoir $s_g = \alpha$, c'est-à-dire que le taux d'épargne égalise l'élasticité de substitution du capital.

On a vu qu'un effort d'épargne augmente toujours le revenu par tête de long terme y^*. Cependant, un trop important effort d'épargne nuit à la consommation par tête : on parle alors de sur-accumulation inefficace.