Macroéconomie - Croissance

Licence 3

Septembre 2018

1 Rappels sur les dérivées

1.1 Etude d'une fonction

Une fonction est :
- croissante lorsque sa dérivée est positive ;
- décroissante lorsque sa dérivée est négative ;
- constante lorsque sa dérivée est nulle ;
- convexe lorsque sa dérivée seconde (la dérivée de sa dérivée) est positive ;
- concave lorsque sa dérivée seconde est négative.

1.2 Dérivées usuelles

Fonction f	D_f	Fonction dérivée f'	$D_{f'}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^\alpha,\ \alpha \in]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$

Formules de dérivation. Attention aux domaines de dérivation des fonctions avant d'appliquer ces formules !

$(u+v)' = u' + v'$	$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\boxed{(v \circ u)' = (v' \circ u)\, u'}$$

Les formules suivantes sont des conséquences de la formule de dérivation d'une composée de fonctions, mais il est bon de les connaître également :

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u' \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$$

Par ailleurs, quelques rappels sur les règles du log : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, $e^{\ln a} = a$ et $\ln(a^k) = k \ln a$.

Exemple. *Fonctions de x à dériver :* $\ln(2x+\beta)$ *;* $\ln(4x^\alpha)$ *;* $ax^{\alpha+\beta}$

1.3 Dérivées partielles

Pour une fonction de deux variables $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un point $(a,b) \in D$, on définit des dérivées partielles suivantes par rapport à chacune de ses variables :

— $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ est la dérivée de la fonction partielle $f(x,b)$ en a ;

— $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ est la dérivée de la fonction partielle $f(a,y)$ en b.

Parfois, on les note aussi $f_x(a,b)$ et $f_y(a,b)$.

Exemple. *Soit $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$. Calculer les dérivées partielles au point* $(1,1)$.

En considérant $y = 1$ constant, on a $f(x,1) = x^2 - 3x + 2$ et en dérivant par rapport à x on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3$, et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -1$$

En considérant $x = 1$ constant, on a $f(1,y) = 1 - 3y + 2y^2$ et en dérivant par rapport à y on a $\frac{\partial f}{\partial y} = -3 + 4y$, et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$$

Exemple. *Soit une fonction Cobb-Douglas $F(x_1,x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$. Les dérivées partielles par rapport à x_1 et x_2 sont :*

$$F_{x_1} = A\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta \quad \text{et} \quad F_{x_2} = A\alpha x_1^\alpha x_2^{\beta-1}$$

Exemple. *(facultatif, à essayer de faire à la maison). Soit une fonction de production CES telle que $F(K,L) = A\left[aK^\gamma + (1-a)L^\gamma\right]^{1/\gamma}$. Calculer ses dérivées partielles en utilisant la formule vue ci-dessus : $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$.*

La dérivée partielle par rapport à L est :

$$F_L = A(1-a)\left[(1-a) + aL^{-\gamma}K^\gamma\right]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

La dérivée partielle par rapport à K est :

$$F_K = Aa\left[a + (1-a)K^{-\gamma}L^\gamma\right]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

2 Equations différentielles

Pour étudier les différentes variables utilisées dans ce cours (production, capital, progrès technique), il nous faudra souvent avoir recours aux equations différentielles. Pour cela, il faut savoir :

1. ce qu'est une équation différentielle ;
2. étudier ses propriétés (état stationnaire, stabilité, etc.) ;
3. éventuellement, trouver la solution d'une équation différentielle.

2.1 Dérivée par le temps

C'est la manière dont une variable change dans le temps. On note $\dot{x_t}$ la dérivée de x_t par le temps. On a donc $\dot{x_t} = \frac{\partial x_t}{\partial t}$. Si x_t augmente, $\dot{x_t}$ est positif. Si x_t diminue, $\dot{x_t}$ est négatif. Enfin, lorsque x_t est constant (c'est-à-dire. à l'équilibre de x_t) $\dot{x_t} = 0$. Réciproquement si $\dot{x_t} = 0$, x_t a une valeur constante.

2.2 Taux de croissance

$$g_y = \frac{\dot{y}}{y}$$

Le taux de croissance d'une variable (ex : y_t) s'obtient en divisant la dérivée par le temps de la variable ($\dot{y_t}$) par la variable elle-même (y_t). Intuitivement, cette expression représente donc la croissance de la variable en pourcentage, c'est-à-dire de combien elle augmente par rapport à sa valeur. On le note g_y.

2.3 Définition et exemples

Une équation différentielle est définie par une relation entre une fonction et sa dérivée. Prenons une fonction y, qui dépend d'une variable t, de sorte que y_t (ou $y(t)$) est la valeur de la fonction y en t. Dans notre cas, une equation différentielle donnera une relation entre la fonction y et sa dérivée, notée en général $\dot{y}$.

Définition. *On dit que y vérifie une équation différentielle s'il existe une fonction f telle que :*

$$\dot{y}_t = f(y_t)$$

Exemples :

1. $\dot{y}_t = ay_t + b$, $a, b \in \mathbb{R}$
2. $\dot{k}_t = sk_t^\alpha - rk_t$, $s, r, \alpha > 0$

Remarque : Dans les exemples précédents, a, b, s, r, α sont des *paramètres* des équations différentielles, c'est-à-dire que l'on considère qu'ils sont fixes, mais quelconques, mises à part les conditions précisées à droites. A l'inverse, y et k désignent les *inconnues* de cette équation, ce ne sont donc pas n'importe quelles fonctions, mais il peut y en avoir plusieurs.

2.4 Propriétés des états stationnaires

On appelle état stationnaire (ou équilibre) d'une équation différentielle une solution constante $y_t = y^*$, c'est-à-dire telle que $\dot{y}_t = 0$ pour tout t.

Exemples :

1. Pour $\dot{y}_t = ay_t + b$, à l'état stationnaire, $\dot{y}_t = 0$, on a donc $ay_t + b = 0$. Trois cas sont possibles :
   — si $a = 0$ et $b \neq 0$, il n'y pas d'état stationnaire ;
   — si $a = 0$ et $b = 0$, toutes les solutions sont stationnaires ;
   — si $a \neq 0$, on isole y_t et on obtient $y_t = y^* = -\frac{b}{a}$ pour tout t.

2. Pour $\dot{k}_t = sk_t^\alpha - rk_t$, et $s, r, \alpha > 0$, à l'état stationnaire on a $sk_t^\alpha - rk_t = 0$. $k_t = k_1^* = 0$ est donc une solution stationnaire évidente. Supposons donc $k_t \neq 0$ pour tout t, alors la solution vérifie :

$$sk_t^\alpha - rk_t \iff sk_t^\alpha = rk_t$$

Avec $k_t \neq 0$ pour tout t, on obtient donc un deuxième état stationnaire :

$$k_t^{\alpha-1} = \frac{r}{s} \iff k_t = k_2^* = (\frac{r}{s})^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

L'une des propriétés intéressante à étudier est sa stabilité d'un état stationnaire. Se demander si un état stationnaire est stable, c'est se poser la question : est-ce que les autres solutions de l'équation différentielle vont avoir tendance à s'en rapprocher, ou bien au contraire à s'en éloigner ?

Pour que l'état stationnaire $y*$ soit stable, il faut que toute solution y de l'équation différentielle vérifie pour tout t :
— si $y_t < y^*$, alors $\dot{y}_t > 0$;
— et si $y_t > y^*$, $\dot{y}_t < 0$

En termes économiques, nous verrons que l'état stationnaire d'une équation différentielle peut être interprété comme la trajectoire de l'économie **à long terme** si cet état stationnaire est stable.

Exemples :

1. Soit $\dot{y}_t = ay_t + b$ l'équation différentielle considérée, dont la solution à l'état stationnaire est $y_t = y^* = -\frac{b}{a}$, alors :
   — si $a > 0$, l'état stationnaire est instable ;
   — si $a < 0$, l'état stationnaire est stable.
2. Soit l'équation $\dot{k}_t = sk_t^\alpha - rk_t$, avec $s, r, \alpha > 0$, alors :
   — $k_1^* = 0$ est un état stationnaire instable ;
   — $k_2^* = (\frac{r}{s})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ est un état stationnaire stable.

On visualise bien ces résultats sur des schémas.

2.5 Solution des équations différentielles

En général, il peut être difficile de trouver explicitement les solutions d'une équation différentielle. Dans ce cours, nous n'aurons à résoudre que les équations différentielles simples qui suivent.

Définition. *1. On appelle équation différentielle linéaire une équation de la forme :*

$$\dot{y}_t = a.y_t + b, \;\; a, b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

2. On appelle équation différentielle liénaire homogène une équation de la forme :

$$\dot{y}_t = a.y_t, \;\; a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Théorème. *Soit l'équation $\dot{y}_t = a.y_t$, avec $a \in \mathbb{R}$. Alors, une fonction y vérifie cette équation si et seulement si y est de la forme :*

$$y_t = C.e^{at},\ C \in \mathbb{R}$$

De plus, on a :

$$C = y_0$$

Démonstration : Comme dans le théorème il y a un « si et seulement si », on doit montrer une double implication.

Sens 1 : Soit y est de la forme :

$$y_t = C.e^{at},\ C \in \mathbb{R}$$

Montrons que y vérifie l'equation différentielle. Pour cela, il suffit de dériver y, et on obtient :

$$\dot{y}_t = a.C.e^{at} = a.y_t$$

Sens 2 : Soit maintenant y vérifiant l'equation différentielle :

$$\dot{y}_t = a.y_t$$

On définit une nouvelle fonction z, telle que $z_t = y_t.e^{-at}$, et on dérive z :

$$\dot{z}_t = \dot{y}_t.e^{-at} - a.y_t.e^{-at} = a.y_t.e^{-at} - a.y_t.e^{-at} = 0$$

Donc z est une fonction constante, et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$y_t.e^{-at} = z_t = C \iff y_t = C.e^{at}$$

Ce qui finit de démontrer le théorème. $\square$

Corollaire. *Soit l'équation $\dot{y}_t = a.y_t + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Alors, une fonction y vérifie cette équation si et seulement si y est de la forme :*

$$y_t = C.e^{at} - \frac{b}{a},\ C \in \mathbb{R}$$

De plus, on a :

$$C = y_0 + \frac{b}{a}$$

Démonstration : Soit y une fonction, on pose $z_t = y_t + \frac{b}{a}$ pour tout t. Alors, y vérfie l'équation du corollaire si et seulement si :

$$\dot{y}_t = a.y_t + b \iff \dot{z}_t = a.(z_t - \frac{b}{a}) + b \iff \dot{z}_t = a.z_t$$

Donc y est solution de l'équation linéaire si et seulement si z est solution de l'équation homogène correspondante. D'après le théorème précédent, cela est vrai si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$, tel que :

$$y_t + \frac{b}{a} = z_t = C.e^{at} \iff y_t = C.e^{at} - \frac{b}{a}$$

Ce qui est bien le résultat recherché. $\square$

3 Autres références si nécessaire

Knut Sydsaeter, *Mathématiques pour l'économie*

Naïla Hayek, *Mathématiques pour l'économie* (Chapitre sur les dérivées)

Bernard Guerrien et Isabelle This, *Les mathématiques de la microéconomie* (Chapitre 1 sur la dérivation)

Sophie Jallais, *Mathématiques des modèles dynamiques* (Pour les équations différentielles)

4 Quelques exercices et leur solution

(1) Si $Y_t = \alpha X_t^\beta$, avec α et β des constantes et X_t une variable, que vaut $\ln(Y_t)$?

$\ln(Y_t) = \ln(\alpha X_t^\beta) = \ln(\alpha) + \ln(X_t^\beta) = \ln(\alpha) + \beta \ln(X_t)$

(2) Si $\ln(Y_t) = \ln(\alpha) + \beta \ln(X_t)$, que vaut le taux de croissance de Y_t ?

En dérivant $\ln(Y_t)$ par le temps, on obtient : $\frac{\partial \ln(Y_t)}{\partial t} = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\partial \ln(\alpha)}{\partial t} + \beta \frac{\partial \ln(X_t)}{\partial t}$

Mais puisque α est une constante, $\frac{\partial \ln(\alpha)}{\partial t} = 0$ et $\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \beta \frac{\partial \ln(X_t)}{\partial t} = \beta \frac{\dot{X}_t}{X_t}$, ou encore en notant g_Y le taux de croissance de Y et g_X le taux de croissance de X, $g_Y = \beta g_X$

(3) Si $Y_t = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$, que vaut le taux de croissance de Y_t ?

$$\ln(Y_t) = \ln(AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}) = \ln(A) + \ln(K_t^\alpha) + \ln(L_t^{1-\alpha}) = \ln(A) + \alpha \ln(K_t) + (1-\alpha) \ln(L_t)$$

et en dérivant on obtient :

$$g_{Y_t} = \frac{\partial \ln(Y_t)}{\partial t} = \frac{\partial \ln(A)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \ln(K_t)}{\partial t} + (1-\alpha) \frac{\partial \ln(L_t)}{\partial t} = \alpha g_{K_t} + (1-\alpha) g_{L_t}$$

(4) Comment simplifier $\frac{X_t^{1-\alpha}}{X_t}$?

$$\frac{1}{X_t} = X_t^{-1} \quad \text{donc} \quad \frac{X_t^{1-\alpha}}{X_t} = X_t^{1-\alpha} X^{-1} = X_t^{1-\alpha-1} = X_t^{-\alpha}$$

(5) On note $k_t = \frac{K_t}{L_t}$. Ecrivez $K_t^\alpha L_t^{-\alpha}$ en fonction de k_t et α.

$$K_t^\alpha L_t^{-\alpha} = K_t^\alpha \frac{1}{L_t^\alpha} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\alpha = k_t^\alpha$$

(6) On note $y_t = \frac{Y_t}{L_t}$ et $k_t = \frac{K_t}{L_t}$. Si $Y_t = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$, exprimez y_t en fonction de k_t, A et α.

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} = AK_t^\alpha L_t^{-\alpha} = A\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\alpha = Ak_t^\alpha$$

(7) Si $Y_{t+T} = Y_t(1+g_Y)^T$, exprimez g_Y en fonction de Y_{t+T}, Y_t et T.

$$\frac{Y_{t+T}}{Y_t} = (1+g_Y)^T \iff \left(\frac{Y_{t+T}}{Y_t}\right)^{\frac{1}{T}} = (1+g_Y) \iff g_y = \left(\frac{Y_{t+T}}{Y_t}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

(8) $Y_t = F(K_t, L_t) = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$. Que vaut $PM_K = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}$, la productivité marginale du capital ?

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha AK_t^{\alpha-1}L_t^{1-\alpha} = \alpha A\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1}$$

(9) Dans l'exemple précédent, lorsque K augmente, que fait la productivité marginale du capital ?

Dans l'expression :

$$PM_K = \alpha A\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1}$$

K est au numérateur, mais l'exposant $(\alpha - 1)$ est négatif. Si K augmente, $\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}$ va donc diminuer.

Autre manière de s'en assurer, dériver la productivité marginale par le capital :

$$\frac{\partial PM_K}{\partial K} = \alpha(\alpha-1)AL_t^{1-\alpha}K_t^{\alpha-2} < 0 \text{ car } 0 < \alpha < 1$$