Mathématiques 2
Rappels bases et espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{R}$-EV et G un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tel que $G = \{C_1\,, C_2\,, \ldots, C_n\}$.

Définition (Système générateur)**.** On dit que le système G engendre l'espace vectoriel E si et seulement si $\forall X \in E\,, \exists a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n\,, X = a_1C_1 + a_2C_2 + \ldots + a_nC_n$, autrement dit si et seulement si tout élément X de E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de G.

Remarque. On dit aussi que G est un système générateur de E.

Proposition. L'ensemble G engendre E si et seulement si pour tout X de E, on a : $\mathrm{rg}(C_1 \cdots C_n|X) = \mathrm{rg}(C_1 \cdots C_n)$.

Proposition. L'espace engendré par un ensemble G de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un SEV de $\mathbb{R}^n$.

Définition (Base)**.** On dit qu'un système de vecteurs B est une base de E si et seulement si B engendre E et B est libre.

Proposition. Tout vecteur de E peut s'écrire comme CL unique des vecteurs de B si et seulement si B est une base de E

Définition (Dimension d'un espace vectoriel)**.** On appelle dimension d'un espace vectoriel E et on note $\dim E$, le cardinal d'une base B de E.

Remarque. Le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble, noté card. Ici, on a écrit $\dim E = \mathrm{card} B$.

Propriétés.

- $\dim E = \mathrm{rg}\, B$.

- La dimension d'un ensemble de vecteurs d'un EV E est inférieure ou égale à la dimension de E.

- Soit G un système générateur de E, alors $\dim E = \operatorname{rg} G$.

- Si E est un EV de dimension n et si S est un système libre de n vecteurs de E, alors S est une base de E.

Définition (Produit scalaire)**.** On appelle produit scalaire de $X = (x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1\,, y_2\,, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de E et on note $X * Y$ le scalaire $X * Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Définition (Norme)**.** On appelle norme du vecteur X de E et on note $\|X\|$ le scalaire $\|X\| = \sqrt{X * X}$.

Remarque. La norme est positive. Si elle est nulle, c'est que le vecteur dont on a calculé la norme était le vecteur nul. On a par ailleurs l'inégalité triangulaire $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ et l'homogénéité de degré 1 $\|rX\| = |r|\|X\|$.

Définition (Vecteurs orthogonaux)**.** On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Définition (Base orthonormée)**.** Une base est dite orthonormée lorsque ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1.