Mathématiques 2
Interro 3 - TD 2109

Consignes : Calculatrice interdite. Traitez les questions dans l'ordre que vous souhaitez. Attention à la rédaction.

1. Soit $G = \{C_1\,, \ldots, C_k\}$ un ensemble de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble engendré par l'ensemble G de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que les colonnes de V forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On note V_1, V_2 et V_3 les colonnes de V. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur AV_3, puis les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B} = \{V_1\,, V_2\,, V_3\}$.

4. L'ensemble $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0 \text{ et } 2x + z = 0 \right\}$ est-il un espace vectoriel ?

5. Questions de cours :

- définir une base orthonormée ;
- définir la dimension d'un espace vectoriel.

1. On utilise la caractérisation des SEV. L'ensemble de l'énoncé est l'ensemble E tel que :

$$E = \{a_1C_1 + \ldots + a_kC_k | a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}, C_1, \ldots, C_k \in \mathbb{R}^n\}$$

- Soit $a_1 = \ldots = a_k = 0$, alors $a_1C_1 + \ldots + a_kC_k = 0_{\mathbb{R}^n}$, donc $0_{\mathbb{R}^n} \in E$ (E non vide).
- Soit $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}$, soit $X\,, Y \in E$, on peut écrire :

  $$\begin{aligned} X &= a_1C_1 + \ldots + a_kC_k \\ Y &= b_1C_1 + \ldots + b_kC_k \end{aligned}$$

  Par suite,

  $$\begin{aligned} \lambda X + \mu Y &= \lambda(a_1C_1 + \ldots + a_kC_k) + \mu(b_1C_1 + \ldots + b_kC_k) \\ &= (\lambda a_1 + \mu b_1)C_1 + \ldots + (\lambda a_k + \mu b_k)C_k \\ &= x_1C_1 + \ldots + x_kC_k \end{aligned}$$

  avec $\forall i \in \{1\,, \ldots, n\}\,, x_i \in \mathbb{R}$, car somme de produits de deux nombres réels.

  Donc $\lambda X + \mu Y \in E$
- Et donc, on conclut que E est un SEV de $\mathbb{R}^n$.

2. Pour montrer que les colonnes de V forment une base de $\mathbb{R}^3$, on commence par calculer le rang de V par la méthode du pivot de Gauss. On débute en modifiant l'ordre des colonnes, alors on a :

$$\mathrm{rg}(V) = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure d'ordre 3 sans zéro sur la diagonale, donc $\mathrm{rg}(V) = 3$. Ainsi, les colonnes de V sont libres. Ce sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc les colonnes de V forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Les coordonnées de AV_3 dans la base formée par les colonnes de V sont données par le vecteur solution de $V\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = AV_3$.

On calcule d'abord AV_3 :

$$AV_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On résout ensuite le système, en inversant les colonnes comme pour le rang ci-dessus et en utilisant la matrice élargie :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \iff \begin{cases} y = 2 \\ x - y = 1 \\ z + x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ce sont les coordonnées de AV_3 dans la base des colonnes de V.

4. On ré-écrit B comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0 \text{ et } 2x + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3, y = -3x \text{ et } z = -2x \right\} \\ &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ -3x \\ -2x \end{smallmatrix}\right), x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right), x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

B est l'ensemble des homothéties du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, autrement dit B est le sous-espace vectoriel engendré par le système $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

5.

Définition (Base orthonormée)**.** Une base orthonormée est une base dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme 1.

Définition (Dimension d'un espace vectoriel)**.** On appelle dimension d'un espace vectoriel E et on note $\dim E$, le cardinal d'une base B de E.