Mathématiques 2
Interro 3 - TD 2108

Consignes : Calculatrice interdite. Traitez les questions dans l'ordre que vous souhaitez. Attention à la rédaction.

1. Questions de cours :

- définir la base d'un espace vectoriel ;
- définir la dimension d'un espace vectoriel.

2. L'ensemble $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0 \text{ et } 2z + x = 1 \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel ?

3. Soit la matrice $V = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que les colonnes de V forment une base de $\mathbb{R}^3$. V est-elle inversible ?

4. On note V_1, V_2 et V_3 les colonnes de V. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur AV_3, puis les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B} = \{V_1 , V_2 , V_3\}$.

5. Soit $G = \{C_1 , \ldots , C_k\}$ un ensemble de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble engendré par l'ensemble G de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1.

Définition (Base)**.** On dit qu'un système de vecteurs B est une base de E si B engendre E et B est libre.

Définition (Dimension d'un espace vectoriel)**.** On appelle dimension d'un espace vectoriel E et on note $\dim E$, le cardinal d'une base B de E.

2. On voit que $O_{\mathbb{R}^3} \notin B$, car $2 \times 0 + 0 = 0 \neq 1$ (deuxième condition), donc B n'est pas un sous-espace vectoriel.

3. Pour montrer que les colonnes de V forment une base de $\mathbb{R}^3$, on commence par calculer le rang de V par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(V) = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_1\,\text{(pivot)} \\ L_2' \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3' \end{array} \\
= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2'\,\text{(pivot)} \\ L_3'' \leftarrow 2L_3 + L_2' \end{array} \\
= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} &
\end{aligned}$$

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure d'ordre 3 sans zéro sur la diagonale, donc $\mathrm{rg}(V) = 3$. Ainsi, les colonnes de V sont libres. Ce sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc les colonnes de V forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Par ailleurs, V est de plein rang, V est donc inversible.

4. Les coordonnées de AV_3 dans la base formée par les colonnes de V sont données par le vecteur solution de $V\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = AV_3$.

On calcule d'abord AV_3 :

$$AV_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

On résout ensuite le système, en utilisant les mêmes étapes que pour le rang et la matrice élargie :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1\,(\text{pivot}) \\ L_2' \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3' \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2'\,(\text{pivot}) \\ L_3'' \leftarrow 2L_3 + L_2' \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right]$$

$$\iff \begin{cases} z = 5 \\ y = -1 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$$

Ce sont les coordonnées de AV_3 dans la base des colonnes de V.

5. On utilise la caractérisation des SEV. L'ensemble de l'énoncé est l'ensemble E tel que :

$$E = \{a_1 C_1 + \ldots + a_k C_k | a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}, C_1, \ldots, C_k \in \mathbb{R}^n\}$$

- Soit $a_1 = \ldots = a_k = 0$, alors $a_1 C_1 + \ldots + a_k C_k = 0_{\mathbb{R}^n}$, donc $0_{\mathbb{R}^n} \in E$ (E non vide).

- Soit $\lambda , \mu \in \mathbb{R}$, soit $X , Y \in E$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} X &= a_1 C_1 + \ldots + a_k C_k \\ Y &= b_1 C_1 + \ldots + b_k C_k \end{aligned}$$

  Par suite,

$$\begin{aligned} \lambda X + \mu Y &= \lambda(a_1 C_1 + \ldots + a_k C_k) + \mu(b_1 C_1 + \ldots + b_k C_k) \\ &= (\lambda a_1 + \mu b_1) C_1 + \ldots + (\lambda a_k + \mu b_k) C_k \\ &= x_1 C_1 + \ldots + x_k C_k \end{aligned}$$

  avec $\forall i \in \{1 , \ldots , n\} , x_i \in \mathbb{R}$, car somme de produits de deux nombres réels.

  Donc $\lambda X + \mu Y \in E$

- Et donc, on conclut que E est un SEV de $\mathbb{R}^n$.