Dans ce qui suit, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Dans ce repère, on considère les trois plans $\mathcal{P}_1$ d'équation $a_1.x+b_1.y+c_1.z=d_1$; $\mathcal{P}_2$ d'équation $a_2.x+b_2.y+c_2.z=d_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équation $a_3.x+b_3.y+c_3.z=d_3$.

Trois vecteurs normaux de ces trois plans sont $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}$.

Petit rappel sur le parallélisme de plan

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles $\Leftrightarrow$ leurs vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ les coefficients $\boxed{a_1;b_1;c_1}$ et $\boxed{a_2;b_2;c_2}$ sont proportionnels

Lorsque la proportionnalité s'étend aux quatre coefficients $\boxed{a_1;b_1;c_1;d_1}$ et $\boxed{a_2;b_2;c_2;d_2}$, alors nous avons à faire au même plan : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondus.

Un point M appartient aux trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ lorsque et seulement lorsque ses coordonnées en vérifient les trois équations données précédemment.

Le problème de l'intersection

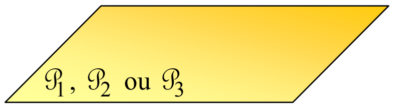
L'intersection des plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées sont les solutions du système de trois équations à trois inconnues (3×3) :

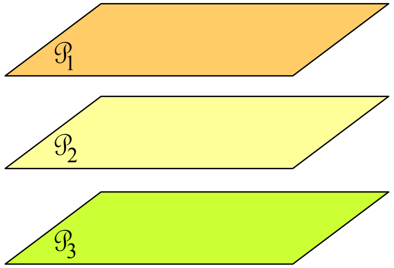
$$(S)\begin{cases}a_1.x+b_1.y+c_1.z=d_1\\a_2.x+b_2.y+c_2.z=d_2\\a_3.x+b_3.y+c_3.z=d_3\end{cases}$$

Résoudre le système (S), c'est savoir ce qu'est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$.
Passons en revue tous les cas possibles.

1. Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont confondus

L'intersection $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3$ est le plan $\mathcal{P}_1$ qui est aussi le plan $\mathcal{P}_2$ ou le plan $\mathcal{P}_3$.
Le système admet une infinité de solutions.
Les trois équations du système sont proportionnelles.
Il s'agit de trois équations d'un même plan.



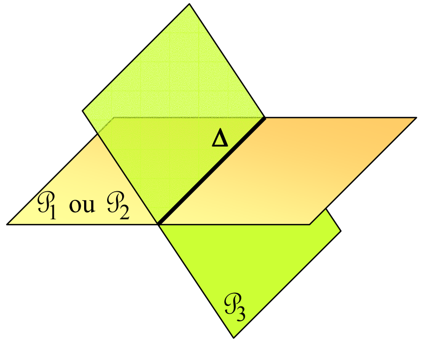


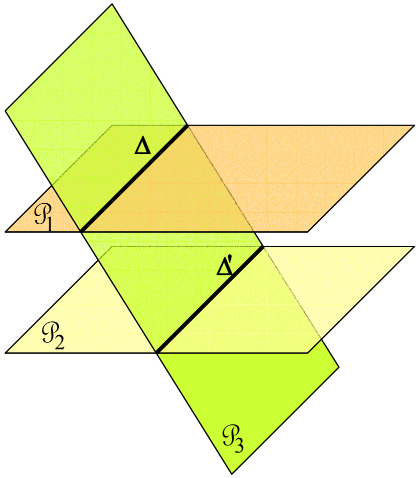
2. Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont parallèles et non confondus.

L'intersection des trois plans est l'ensemble vide.
Le système (S) n'admet aucune solution.
Dans ce cas, les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ des trois plans sont colinéaires.
Seuls les coefficients $\boxed{a_1;b_1;c_1}$, $\boxed{a_2;b_2;c_2}$ et $\boxed{a_3;b_3;c_3}$ sont proportionnels car les trois équations se rapportent à trois plans non confondus.

3. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondus et, le plan $\mathcal{P}_3$ leur est sécant

L'intersection des trois plans est une droite Δ.
Le système (S) admet une infinité de solutions.
Les deux premières équations des
$\mathcal{P}_1 : a_1.x+b_1.y+c_1.z=d_1$ et
$\mathcal{P}_2 : a_2.x+b_2.y+c_2.z=d_2$ sont
proportionnelles.
Par contre, les coefficients $\boxed{a_3;b_3;c_3}$ ne sont proportionnels ni à $\boxed{a_1;b_1;c_1}$, ni à $\boxed{a_2;b_2;c_2}$.
Ceci car le vecteur normal $\overrightarrow{n_3}$ n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{n_1}$, ni à $\overrightarrow{n_2}$.





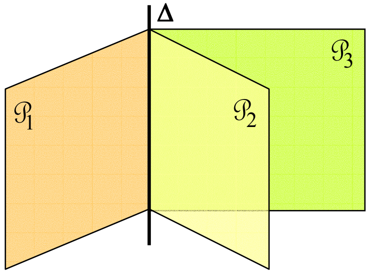
4. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles distincts et, le plan $\mathcal{P}_3$ leur est sécant

L'intersection des trois plans est l'ensemble vide.
Le système (S) n'admet aucune solution.
On est alors dans la configuration du théorème dit d'incidence.
Dans ce cas, seuls les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires.
Seuls les coefficients $\boxed{a_1;b_1;c_1}$ et $\boxed{a_2;b_2;c_2}$ sont proportionnels.

Dans les cas suivants, il n'y a plus proportionnalité entre les coefficients des équations en x ; y et z

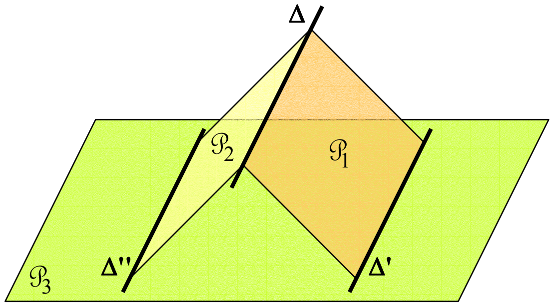
5. Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants suivant une même droite Δ

L'intersection des trois plans est une droite.
Le système (S) admet une infinité de solutions.
On peut voir les choses de la manière suivante :
les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ qui est incluse dans le plan $\mathcal{P}_3$.
Dans ce cas, les trois vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ sont coplanaires sans être colinéaires.



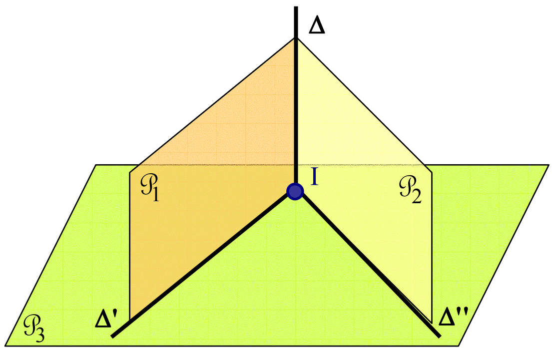
6. Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont deux à deux sécants mais suivant trois droites parallèles distinctes Δ, Δ', et Δ''

L'intersection des trois plans est vide.
Le système (S) n'a aucune solution.
On peut voir cette situation de la manière suivante :
les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ qui est parallèle au plan $\mathcal{P}_3$ sans y être incluse.
Cette situation est celle du théorème dit du toit.
Dans ce cas, les trois vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ sont aussi coplanaires sans être colinéaires.



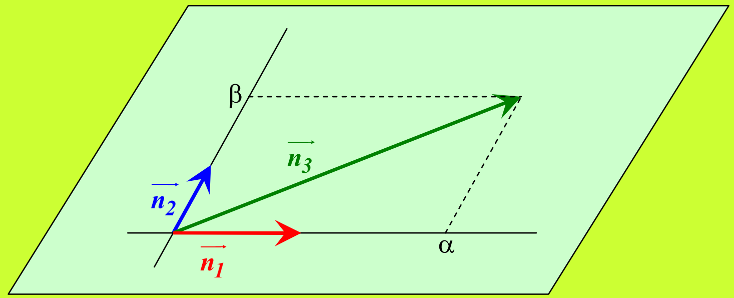
7. Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants et leur intersection est un point I

Le système (S) a alors une seule solution et se résout classiquement par la méthode du pivot de Gauss (ou par combinaisons linéaires).
Les trois droites d'intersection Δ, Δ' et Δ'' sont sécantes en I.
Dans ce cas là et seulement dans ce cas là, les trois vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ ne sont pas coplanaires.



Comment établir que trois vecteurs sont coplanaires ?

Les trois vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}$ sont coplanaires lorsque et seulement lorsque on peut les loger dans un même plan.



Pour établir que les trois vecteurs $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ sont coplanaires, il suffit de prouver qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\overrightarrow{n_3} = \alpha.\overrightarrow{n_1} + \beta.\overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases}a_3 = \alpha.a_1 + \beta.a_2\\ b_3 = \alpha.b_1 + \beta.b_2\\ c_3 = \alpha.c_1 + \beta.c_2\end{cases}}_{\text{Ce système 3×2 d'inconnues } \alpha \text{ et } \beta \text{ admet-il des solutions ?}}$$

Précisons que deux vecteurs sont toujours coplanaires.
Si sur les trois vecteurs, deux sont colinéaires, alors le trio est coplanaire.