Mathématiques 2 – TD 2108
Interrogation 2

1. Question de cours : donner la définition du rang pour une matrice M de taille $m \times n$.

2. Question de cours : quelle propriété lie le rang d'une matrice et le rang d'une de ses sous-matrices ?

3. Exercice. Soit M_1 et M_2 deux matrices telles que :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Déterminer le rang de M_1.
- Sachant que le rang de M_2 est $rg(M_2) = 2$, en déduire, sans calcul, si le système S_1 admet une unique solution, une infinité de solutions ou aucune solution :

$$S_1 : M_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Définition du rang : voir cours. Le rang de M de taille $m \times n$ est le minimum de lignes ou de colonnes libres que la matrice comprend, on en déduit que $\text{rg}(M) \leq \min(n\,, m)$.

2. Propriété liant rang d'une sous-matrice et sa matrice. Soit M une matrice, et S une sous-matrice de M, alors on a : $\text{rg}(S) \leq rg(M)$.

3.

$$\begin{aligned}
\text{rg}(M_1) &= \text{rg}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1\,(\text{pivot}) \\ L'_2 \leftarrow 4L_1 + 3L_2 \\ L'_3 \leftarrow 3L_3 + L_1 \end{matrix} \\
&= \text{rg}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 10 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1\,(\text{pivot}) \\ L'_2\,(\text{pivot}) \\ L''_3 \leftarrow 4L'_3 + 5L'_2 \end{matrix} \\
&= \text{rg}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 66 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La sous-matrice obtenue en retirant la troisième colonne est une matrice triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale, son rang est donc égal à 3. Par suite, on obtient : $\text{rg}(M_1) \geq 3$. Par ailleurs, on sait que le rang d'une matrice est inférieur ou égal au nombre de lignes qui la composent, donc $\text{rg}(M_1) \leq 3$. On conclut que $\text{rg}(M_1) = 3$.

On sait que le rang de M_2 est égal à 2. Et le système S_1 est représenté par la matrice M_1. Soit $u = (1\,, 2\,, 1)$, on a $\text{rg}(M_1) = \text{rg}(M_2|u) = \text{rg}(M_2) + 1$. Le système S_1 n'admet donc aucune solution.