Mathématiques 2 – TD 2108
Interrogation 1

1. Soit le système S_1 tel que $S_1 : Ax = b$, où $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Résoudre, puis interpréter géométriquement les solutions du système S_1. (1 point)

2. Soit le système S_2 où x, y et z sont les inconnues et a un paramètre :

$$S_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x + y - z = a \end{cases}$$

Résoudre, par la méthode du pivot et avec représentation matricielle, le système S_2, selon les valeurs du paramètre a. (3 points)

3. Interpréter géométriquement les résultats de la question 2. (1 point)

1. On résout le système S_1 sous forme matricielle.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \,(\text{pivot}) \\ L_2' \leftarrow 5L_2 - 2L_1 \end{array} \iff \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1' \leftarrow L_1 - 1/3L_2' \\ L_2'' \leftarrow -1/3L_2' \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1'' \leftarrow 1/5L_1' \\ L_2'' \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

On était en présence d'un système à deux équations deux inconnues, et on a trouvé une unique solution. L'unique solution est donc le point dans le plan à l'intersection des deux droites dont les équations sont les deux équations du système linéaire.

2. On commence par écrire le système sous forme matricielle, puis on résout par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \,(\text{pivot}) \\ L_2' \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3' \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & a-3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' \,(\text{pivot}) \\ L_3' \leftarrow 3L_3' - 4L_2' \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3a-13 \end{array}\right]$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y - 2z = 1 \\ -4z = 3a - 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y - 2z = 1 \\ z = (13 - 3a)/4 \end{cases}$$

Par suite, pour la deuxième ligne, on a :

$$\begin{aligned} -y + 2(13-3a)/4 = 1 &\iff 3y = \frac{26-6a}{4} + 1 \\ &\iff y = \frac{15-3a}{2} \\ &\iff y = \frac{5-a}{2} \end{aligned}$$

Et pour la troisième ligne, on a :

$$\begin{aligned} x - y + z = 1 &\iff x = 1 + y - z \\ &\iff x = 1 + \frac{10-2a}{4} - \frac{13-3a}{4} \\ &\iff x = \frac{4+10-13-2a+3a}{4} \\ &\iff x = \frac{a+1}{4} \end{aligned}$$

Le système a donc une unique solution qui est le vecteur

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+1}{4} \\ \frac{5-a}{2} \\ \frac{13-3a}{4} \end{bmatrix}$$

Il y a une unique solution, qui dépend de la valeur de a. Aucune ligne ou presque ligne de zéros n'est apparue pendant la résolution du pivot de Gauss.

3. Géométriquement, puisque le système à trois équations trois inconnues a une unique solution, ce point-solution est le point d'intersection entre les trois plans définis par le système dans l'espace.